SOURCE PGCD Rouvière

Recasages
- 223 Suites numériques
- 224 Exemples de dev asymptotiques de suites et de fonctions
- 226 Suites vectorielles $u_{n+1} = f(u_n)$
- 229 Fonctions convexes. Fonctions monotones

Énoncé **Méthode de Newton**

Soient $c < d$ deux réels. Soit $f \in \mathcal{C}^2([c,d])$ telle que
- $f(c) < 0 < f(d)$
- $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [c,d]$

f a un unique 0 sur $]c,d[$, noté a
Il existe un intervalle $I \subset [c,d]$ de mesure non nulle tel que, pour tout $x_0 \in I$, la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$:

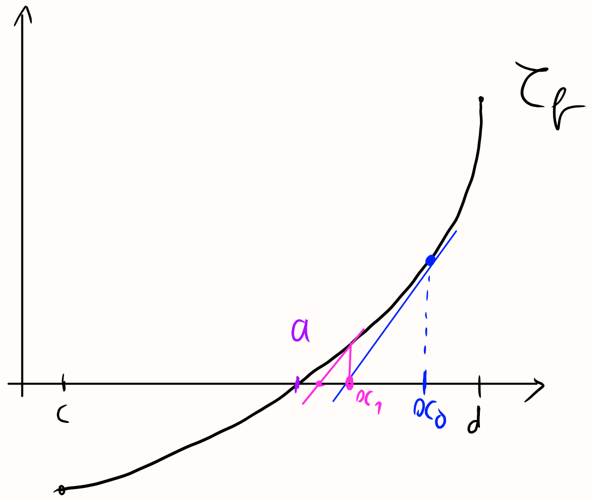
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ converge vers a de manière quadratique (à partir d'un certain rang)

De plus si f'' est positive sur $[c,d]$, $I = [a,d]$ convient et

$$(x_{n+1} - a) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$$

Étapes
0. Dessin + poser F
1. a existe et est un point fixe de F
2. $\forall x \in [c,d], \exists z \in [a,x]$ tq
$$F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2$$
3. Il existe $I \subset [c,d]$ de mesure non nulle tq $x_0 \in I$ $\Rightarrow$ $x_n \to a$ et $\exists\, 0 < \ell < 1$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, (x_n - x_0) < \ell^{2^n}$
4. Si f'' positive sur $[c,d]$ $I = [a,d]$ convient et $(x_{n+1} - a) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$

⓪



On pose $\forall x \in [c,d]$
$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

① a existe et est un point fixe de F

- f est C^2 sur $[c,d]$ donc continue
- $\forall x \in [c,d]$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante. $f(c) < 0 < f(d)$ donc d'après le corollaire du TVI, il existe $a \in]c,d[$ tq $f(a) = 0$

- $F(a) = a - 0$

② $\forall x \in [c,d], \exists y \in [a,x]$ tq $F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(y)}{f'(x)}(x-a)^2$

Soit $x \in [c,d]$

$$F(x) - a = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - F(a)$$
$$= \frac{f(a) - f(x) - (a-x)f'(x)}{f'(x)}$$

D'après la Formule de Taylor à l'ordre 2 appliqué à f en C^2, il existe $y \in [a,x]$ (resp $[x,a]$) tel que

$$f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + \frac{f''(y)}{2}(a-x)^2$$

Donc
$$\frac{f(a) - f(x) - f'(x)(a-x)}{f'(x)} = \frac{f''(y)(a-x)^2}{2f'(x)}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{f''(y)}{f'(x)}(x-a)^2$$

3 Il existe $I \subset [c,d]$ de mesure non nulle tq $x_0 \in I$
$\Rightarrow x_n \to a$ et $\exists\ 0 < \ell < 1$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, (x_n - x_0) < \ell^{2^n}$

f' et f'' sont continues sur $[c,d]$ compact donc atteignent leurs extremas.

En particulier $\min_{[c,d]} |f'| > 0$

Soit $C = \max\left(\dfrac{\max |f''|}{\min |f'|}, 1\right)$

Par 1 $\forall x \in [c,d], |F(x) - a| \leq C|x-a|^2$

Soit $\alpha = \min\left(\frac{1}{2C}, d-a, a-c\right)$

- $\alpha > 0$ car $a \neq d$ $a \neq c$
- $I = [a-\alpha, a+\alpha] \subset [c,d]$
- $C\alpha < 1$

Soit $x_0 \in I$
$\forall n \in \mathbb{N}$ par 1 $|x_{n+1} - a| \leq C|x_n - a|^2$
$\leq (C|x_n - a|)^2$ car $C > 1$
$\leq (C|x_0 - a|)^{2^n}$ par recurrence
$\leq (C\alpha)^{2^n}$

En posant $\ell = C\alpha$ on a la conv. quadra

4 Si f'' positive sur $[c,d]$ $I = [a,d]$ convient et
$(x_{n+1} - a) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$

- Soit $x_0 > a$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par a $\forall n \in \mathbb{N}$, $n = 0$ OK. Soit $n \in \mathbb{N}$
Supposons $(x_n - a) \geq 0$ $= \frac{1}{2}\frac{f''(y)}{f'(x_n)}(x_n - a)$ pour un certain $y \in [c,d]$
≥ 0

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
f est convexe donc $\forall x \in [c,d]$ $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leq x$
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} \leq x_n$

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a unique point fixe de F

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $[a-\alpha, a+\alpha]$ à partir d'un certain rang
Donc la CV est quadratique apcr

Par (7) pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $z_n \in [a, x_n]$ tel que :

$$x_{n+1} - a = \frac{1}{2} \frac{f''(z_n)}{f'(x_n)} (x_n - a)^2$$

Donc $\displaystyle \frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)}$ par continuité de f' et f''

Donc $\displaystyle x_{n+1} - a \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2$